

# Descobrir i mostrar matemàtiques amb fotografies

**Roser Codina Pascual**

rosercodina@ub.edu

**Carme Burgués Flamarich**

Departament de Didàctica de les CCEE i la Matemàtica

Universitat de Barcelona

cburgues@ub.edu

## Resum

Les demandes actuals de coneixement matemàtic i de l'ús que se n'ha de fer obren la necessitat de connectar realitat i matemàtiques, per saber com aplicar-les per resoldre o analitzar situacions i per trobar exemples que puguin il·lustrar idees matemàtiques. Tanmateix, saber mirar la realitat amb ulls matemàtics necessita entrenament i motivació.

En l'article es descriu l'ús de la fotografia amb tal finalitat, posant alguns exemples d'activitats per a la classe d'educació primària. Alhora, es donen indicacions per promoure el raonament i la comprensió dels conceptes i les relacions presents en les imatges.

## Abstract

*The current demands on mathematical knowledge and its use, open the need of connectin reality and mathematics, to know how to apply them to solve or analyze situations and find examples which may illustrate mathematical ideas. But to know how to percive reality with mathematical eyes needs training and motivation.*

*In this paper we describe the use of photography for such purposes, giving some examples of activities for the classroom of Elementary Education. At the same time we give indications on how to promote reasoning and the understanding of concepts and relations which are present in the pictures.*

Una mirada als successius currículums de matemàtiques de l'ensenyament obligatori ens fa veure com han anat evolucionant. Des de fixar com a objectius coneixements memorístics fins a la demanda d'un saber més profund que permeti aplicar les matemàtiques a la realitat quotidiana personal.

L'afirmació que cada cop es demana menys nivell de coneixement a l'alumnat no és pas certa, almenys des dels objectius fixats en l'actualitat per les administracions educatives nacionals i internacionals. Conèixer i aplicar regles i fórmules és un estadi de coneixement molt inferior al de resoldre problemes i analitzar situacions quotidianes fent ús de les matemàtiques.

Amb la publicació dels documents «Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic» de l'educació primària i de l'ESO per part de la Generalitat de Catalunya, s'han completat els currículums vigents afegint una llista detallada de les competències que l'alumne ha de dominar en un cert grau en finalitzar l'etapa educativa.

Les competències, estructurades a partir dels processos matemàtics que ja eren part essencial del currículum actual, recullen d'una manera rellevant que resoldre problemes, raonar matemàticament, fer connexions i comunicar matemàtiques és un saber desitjable per a tothom, no sols per als «afortunats» que tenen facilitat per les matemàtiques.

En aquest article volem presentar-vos, a partir de les nostres experiències, el paper que pot jugar la fotografia en l'aprenentatge matemàtic a l'educació primària. Després de més de set anys d'usar aquest recurs amb estudiants de mestre de primària, mirant de desenvolupar el seu aprenentatge matemàtic i didàctic, hem pogut adonar-nos dels avantatges d'introduir aquest recurs com un més dins del ventall de possibilitats de què disposen els mestres.

Si ens atenim a les propostes de les administracions educatives, dels investigadors i de mestres experts, és clar que cal introduir contextos reals a les nostres escoles. Només des de la pràctica reiterada de treball matemàtic a partir de la realitat podem demanar a l'alumnat de primària que desenvolupi la capacitat de veure, analitzar i exemplificar matemàtiques en situacions quotidianes.

D'altra banda, en el procés d'aprendre de les matemàtiques és essencial anar desenvolupant la capacitat de representar les idees matemàtiques. Per fer-ho, es poden usar objectes, com materials manipulables o quotidians; imatges com dibuixos, fotografies, vídeos o pòsters, i símbols abstractes com ara nombres, taules, gràfics, signes, vocabulari matemàtic i lletres.

Ara bé, els materials concrets i les imatges són decisius per anar construint els conceptes i les relacions matemàtiques, per expressar idees i raonaments, per plantejar i resoldre problemes, etc. Això sí, a poc a poc haurien de ser substituïts per representacions més simbòliques.

És clar que les diverses representacions impliquen diferents nivells d'abstracció. Les menys abstractes apareixen en la introducció de nous conceptes o relacions i les més simbòliques només s'usen espontàniament quan l'aprenent se sent segur i comprèn el que volen dir.

Doncs bé, creiem que en aquests dos camps la fotografia ens pot fer un bon servei. D'una banda, ens permet captar i observar detingudament en un «moment» determinat un «bocí» de realitat. De l'altra, pot servir per a exemplificar conceptes i relacions matemàtiques amb un significat concret que està molt relacionat amb el context.

En el primer cas hem de tenir en compte que quan «estudiem» matemàticament la fotografia ens referirem, sobretot, al que hi figura. Molts cops, els aprenents van més enllà i pensen en el context en si, en sentit global. Per exemple, suposem que tenim una fotografia d'un estoig

de sis ous, on en falten dos. A més de plantejar-se qüestions com: quants ous ens calen per completar l'estoig, de quantes maneres podríem col·locar els quatre ous que hi ha, etc., que estan directament relacionades amb la imatge, es podrien plantejar preguntes com quants estoigs caldrien per a cinc dotzenes d'ous que ja usen informació que no es troba en la imatge, però que pertanyen al context més global de la venda d'ous.

Pel que fa a com la fotografia representa un concepte o relació, hem de tenir present que un concepte pot tenir diverses maneres de ser entès, el que anomenem significats. Restar és una operació matemàtica que pot ser entesa segons el context com a separar; afegir, per completar, comparar, etc. Els significats diferents corresponen a situacions diferents i cal aprofitar-ho per connectar-les amb el concepte de restar.

A continuació oferim exemples d'activitats que es poden dur a la pràctica a l'aula de primària i comentarem com presentar-les, gestionar-les i valorar-les. També intentarem fer-vos avinents consells que des de la nostra pràctica i reflexió considerem útils.

## II·lustrar un lema

Una primera activitat que us proposem és la d'aparellar una fotografia i un concepte o relació matemàtica que destaquï en la imatge. La frase que descriu la idea matemàtica és el que anomenem *lema*. Un altre nom pot ser eslògan —matemàtic, és clar!—, si us sembla més adient.

Per començar, mostrarem una fotografia i demanarem als alumnes que expressin les idees matemàtiques que hi vegin. Serà molt important que es justifiqui on, com... es pot percebre la idea. Aquesta activitat d'escalfament ens pot mostrar quins tipus de conceptes i relacions són capaços de «veure» i com les justifiquen.

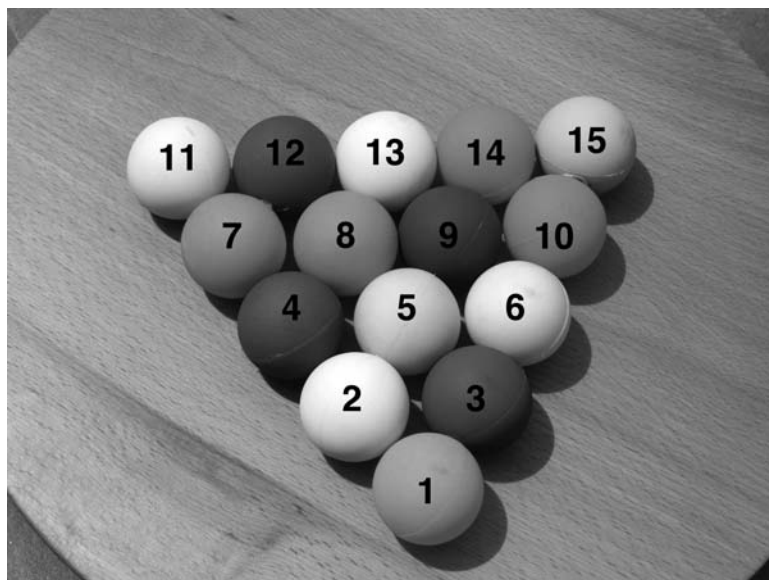


Figura 1

És interessant que s'adonin que hi pot haver moltes idees implicades i de diferents tipus. Podem, per exemple, la fotografia de la figura 1 (originalment, la fotografia mostrava un conjunt de quinze boles de billar amb la mateixa estructura i propietats matemàtiques explícites. Va ser baixada d'Internet i no es pot reproduir en l'article per qüestions de qualitat d'imatge). Formes esfèriques, disposició «en triangle» de les boles, sèries numèriques i nombres triangulars, patrons... són evidents en la imatge. Discutir sobre si la disposició forma o no un veritable triangle ens porta a revisar-ne la definició. També si les formes que percebem com a esferes, ho són o no en la imatge.

Les diferents sèries que s'hi poden apreciar (1, 2, 3, 4... 14, 15; 1, 3, 6, 10, 15; i 1, 2, 4, 7, 11; ...) provoquen la discussió de patrons numèrics diversos (sumar 1 a cada terme per obtenir el següent; sumar 2 al primer terme, 3 al segon, 4 al tercer i 5 al quart; i en la tercera sèrie, sumar 1, 2, 3 o 4 per obtenir els diferents termes).

Una segona activitat, de dificultat major, és que facin el mateix, però la fotografia l'han d'aportar ells. És més difícil perquè implica triar la imatge intencionalment. Han de creure que té elements matemàtics i els han de justificar. D'altra banda, la discussió sobre les contribucions no es pot fer amb tota la classe, especialment si els alumnes són de primer cicle. Una opció és que el mestre les agrupi per facilitar la discussió en petits grups. La pregunta essencial seria sobre si el lema es correspon amb la fotografia.

Després d'aquesta lectura matemàtica de la fotografia, es pot encarregar l'activitat bàsica que és justament la inversa de la primera: **donat un lema, fer o cercar una fotografia que l'exemplifiqui**. L'objectiu principal és la discussió del significat del lema i l'argumentació matemàtica de la coherència entre fotografia i lema. Això es dona, sobretot, durant el procés de recerca i selecció de la imatge.

Fet l'encàrrec de la tasca, **foto i justificació**, els grups de treball han de tenir prou temps per fer la recerca o fer ells les fotos i discutir-ne la validesa. A meitat del període assignat es pot plantejar una presentació a tot el grup classe de les fotos seleccionades provisionalment.

En la sessió de discussió, tothom pot aportar idees de millora, discutir la validesa d'alguna imatge o fer veure que la foto conté altres idees més rellevants que el lema proposat. El mestre pot participar activament posant en «crisi» algunes imatges poc adients i demanant justificacions a l'alumnat.

El resultat de la tasca pot recollir-se en una presentació ppt (o altra), un pòster, fer un àlbum amb les de tota la classe, penjar una exposició real a l'escola o virtual, etc. El recull de les propostes es pot usar per a plantejar activitats posteriors per tal d'aprofundir en els conceptes implicats.

Tant la fotografia de l'activitat inicial de lectura matemàtica com el lema de la proposta han de triar-se segons l'edat dels alumnes i els conceptes treballats o que s'estiguin treballant. És evident que tot plegat ha d'anar precedit d'un estudi del mestre per assegurar-se que la tria és prou rica per produir resultats en els alumnes.

Aquesta activitat permet treballar processos de connexió (entre conceptes, entre matemàtica i realitat) de raonament (trobant patrons, argumentant) i de representació i comunicació

(exemplificant conceptes i relacions matemàtiques a través d'imatges reals) i el mateix plantejament de l'activitat amb la resolució de problemes. Pel que fa als continguts, depèn del lema triat.

Us mostrem algunes fotografies triades per evidenciar el lema «**Entre tots fan un metre**». En la figura 2, podeu apreciar com està present la idea d'unitat de manera directa en les dues imatges. En un cas es tracta de mans i en l'altre, de calçat. S'evidencia la repetició del patró, sense deixar espai entremig. I en la figura 3 s'usa l'ombra de la repetició del patró, un pot de llauna, però és en l'ombra on trobem el metre, corroborat per una indicació explícita. Es tracta de reflectir proporcionalitat geomètrica, que no és un concepte de l'educació primària. És clar, doncs, que un mateix lema pot produir diferents nivells de complexitat, tot segons els coneixements de l'alumnat.

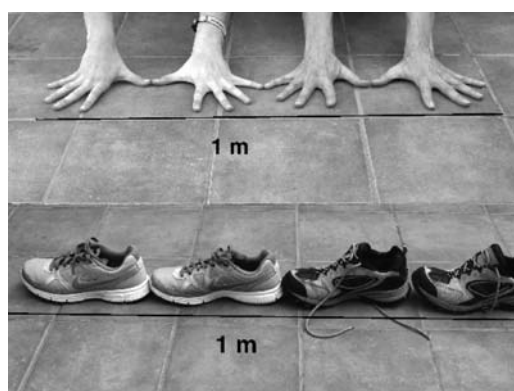


Figura 2

Les tres activitats descrites es basen en aparellar fotografies i lemes, és a dir, en connectar matemàtiques i realitat. El fet que es tracti d'una foto permet acotar la realitat i així concentrar-se en alguns aspectes concrets, fet que comporta aprofundir en el concepte o relació.

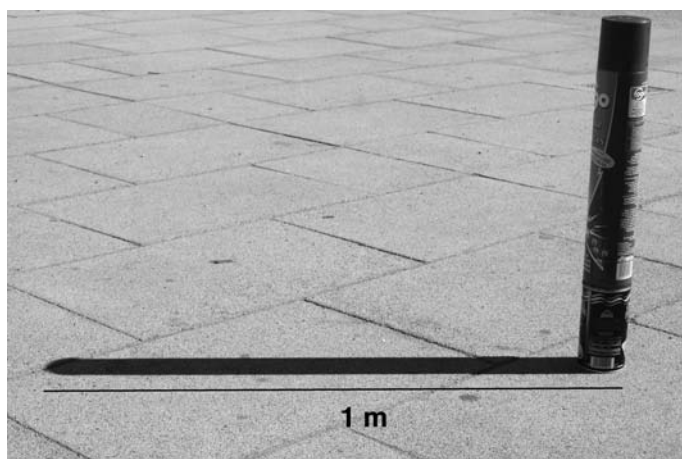


Figura 3



Figura 4

## Proposar problemes

Resoldre problemes és un procés complex, però proposar-ne encara té més dificultat. Provocar que els nens i nenes plantegin preguntes en què calgui usar les matemàtiques per respondre-les és essencial. Un bon recurs per fer-ho és usar fotografies de situacions reals.

Podem començar per mostrar una fotografia i fer preguntes sobre allò que s'hi mostra. Les preguntes han de ser pertinents en relació amb la imatge; no val qualsevol pregunta, han d'estar relacionades amb el fet de voler aconseguir més informació sobre el context i usar les matemàtiques per fer-ho. Resoltes les qüestions caldrà justificar com s'ha usat la foto per resoldre-les. Per exemple, en la figura 4, els alumnes plantejaven preguntes sobre preus de quantitats de pes determinades, unitats de fruita que calia per a un pes concret, canvi a tornar per una compra... el que va portar a discutir sobre estimació de pesos, comparació de volums, etc. Després del treball comú se'ls va proposar un problema més complex: «Compres possibles amb 25 euros (amb 5 cèntims de marge) i havent de contenir productes diversos».

En una segona fase es pot donar una fotografia i es demanarà que ells proposin preguntes o problemes i els resolguin. Abans de procedir a la resolució dels problemes plantejats cal fer una discussió conjunta del grup classe sobre les preguntes que tenen i quines són més interessants de resoldre.

El veritable repte és la proposta, per part dels alumnes, de fotos i problemes. Tant en les activitats prèvies com en aquesta és rellevant el treball en grup. La discussió de les idees implicades és fructífera quan els alumnes no tenen por d'errar i alhora veuen la necessitat d'argumentar les seves afirmacions i intuïcions.





Figura 5

Per exemple, en la figura 5, mostrem una proposta de fotografia i el problema de dues alumnes del grup classe:

Les formes de les tres capses de bombons, què tenen en comú?

L'aresta bàsica de la primera mesura 10 cm i l'alçada 5 cm; l'aresta bàsica de la segona, 6 cm i l'alçada 3 cm; l'aresta de la triangular mesura 18 cm i l'alçada 10 cm. Suposant que els bombons tenen forma d'esfera de 3 cm de diàmetre, calcular aproximadament els bombons que cabran a cadascuna de les capses

A l'hora de resoldre'l proposen l'ús de models per esbrinar el tipus de figures i el que tenen en comú. Les reconeixen com a prismes i citen les cares laterals com a rectangles. Usen unitats de mesura de longitud, àrea i capacitat i calculen volums a partir de fórmules. Cal fer ús d'aproximacions enteres.

Cal deixar prou temps per a la realització de les activitats; és important «madurar» els arguments, que les interaccions entre els grups provoquin noves idees i que s'entengui que un problema o una fotografia poden estar «vius» encara que semblin finalitzats.

Alguns exemples de fotografies i problemes es poden veure en les figures 6 i 7.

El Miquel i l'Anna han marxat a Irlanda de viatge. Han sortit amb molts diners de casa. Però, es van gastar  $\frac{1}{5}$  part del que portaven per comprar els bitllets per al vaixell. En arribar, van llogar un cotxe que va costar la meitat del restant. A més, un cop agafat el cotxe van haver-li de posar 50 euros de benzina. Després, van anar pagant menjar i hotels; això els va costar  $\frac{2}{3}$  parts del restant. Un cop pagat tot això, van anar a veure unes muntanyes on van haver de pagar 4 euros per persona. Per acabar, l'Anna es va gastar 20 euros en regals i en Miquel uns altres 17 euros. Han tornat a casa només amb 5 euros. Quants diners tenien abans de marxar?


**Figura 6**

Mirant la fotografia, considera l'estrella formada per un hexàgon i els sis triangles que l'envolten. Quin seria el seu perímetre usant el costat del triangle com a unitat? I la seva àrea?

Mirant el conjunt del mosaic, digues quins polígons s'hi poden veure. Dibuixa'ls i posa el seu nom.


**Figura 7**

## Reflexions finals

L'ús de les fotografies com a recurs d'aprenentatge matemàtic contribueix a connectar realitat i matemàtiques, aspecte essencial per desenvolupar les competències bàsiques matemàtiques de l'etapa. Aquesta connexió es fa quan es busquen les idees matemàtiques que una fotografia conté i també a la inversa, quan s'estableix una correspondència entre



diverses imatges i una idea matemàtica determinada. Tot plegat és essencial per resoldre problemes plantejats en contextos quotidians.

Recollir un «boci» de realitat mitjançant un vídeo també és una manera de facilitar la connexió entre realitat i matemàtiques. Les experiències del Videomat que es proposen des del Creamat són un exemple d'activitats de connexió. Tanmateix cal distingir entre vídeo i fotografia. El vídeo, per les seves característiques de rapidesa de les accions, no és tan idoni com la fotografia per representar els moments clau d'un procés. Per exemple, en el cas de representar una transformació d'un cub en un altre poliedre, una seqüència de fotografies pot mostrar els moments i els canvis rellevants de la figura. Un vídeo que mostri el procés «no obliga» a triar i justificar els moments clau.

Com en qualsevol altre recurs, el progrés en el maneig i la tria d'imatges s'aconsegueix a base de proposar periòdiques i diverses situacions en què la fotografia tingui un paper principal. Igualment importants són les discussions i argumentacions sobre com la foto «mostra» un concepte o una relació.

Un altre aspecte que ens pot ser útil és com a mitjà d'avaluació del grau de comprensió de l'alumnat. Quan el que es capta són senzillament nombres o figures explícits a la fotografia estem davant d'un nivell més baix que si es veuen relacions entre nombres o entre formes. O també si són capaços de trobar relacions entre dues imatges que representin les mateixes idees; per exemple, en el pla i en l'espai.

La nostra experiència ens ha mostrat com l'alumnat està molt motivat per les activitats amb fotografies, malgrat que es tracti en realitat d'investigacions o problemes d'alt nivell. Trobar una imatge que reflecteixi un lema és un veritable problema, i el mateix en el cas invers.

Molts alumnes mostren ben aviat un comportament més independent: usen la fotografia per prendre apunts i per il·lustrar processos, tot combinant-ho amb notes escrites o esquemes. Diuen també que el recurs de les fotos els ha focalitzat l'atenció i han esdevingut observadors matemàtics de la realitat.

Es poden proposar també tasques en què la fotografia només serveixi per comunicar resultats de recerques. Per exemple, per explicar el procés seguit per obtenir desenvolupaments plans d'un tetraedre que no estiguin formats exclusivament per la unió de triangles equilàters. Es tracta de fotografiar els passos seguits i seleccionar les imatges fins a tenir una seqüència del procés que un company pugui reproduir sense cap informació complementària.

A l'hora de pensar quins temes són més idonis per proposar activitats amb fotografies, és clar que els temes geomètrics ho són. Per exemple, figures (objectes de formes diferents), generació de formes (un cilindre en forma de rotlle de paper o de cordill cargolat), propietats geomètriques (mostrar desenvolupaments plans, paral·lelisme de cares o arestes), propietats comunes a dues formes (simetries, nombre d'elements...).

Però si es té en compte que moltes idees numèriques es poden representar visualment, aleshores el bloc de nombres i operacions del currículum també permet plantejar activitats interessants. Per exemple, l'estimació de quantitats (comptar gent, objectes petits en grans quantitats...), representació de nombres com a multiplicació (rajoles de xocolata, ous en una

ouera...), nombres parells i senars (coses que van en parelles com ara mitjons, sabates...) i moltes altres.

A l'hora d'obtenir les imatges podem recórrer a fons d'imatges d'Internet, concursos de fotografia que es fan des de les associacions de professors de matemàtiques, arxius personals o fer-les expressament!

La nostra experiència ens ha fet veure que els alumnes tendeixen a «fabricar» els seus escenaris. Ja ens sembla bé, doncs, la discussió que implica la «definició» del que es vol; és altament productiva de coneixement matemàtic d'alt nivell.

El que és evident és que avui és molt fàcil tenir una càmera digital (telèfons, tauletes...), que podem fer una gran quantitat d'imatges i quedar-nos amb les que interessen, passar-les a una pantalla i discutir sobre el seu contingut matemàtic. Com sempre, el que compta és interessar els alumnes en un aprenentatge profund de les matemàtiques i ser capaços d'afrontar tasques complexes.

Us animem a proposar activitats de fotografia i matemàtiques que promoguïn el gust per fer matemàtiques.

## Referències

Alsina, C., Nelsen, R. (2006). *Math made visual: Creating Images for Understanding Mathematics*. Washington, DC: The Mathematical Association of America, Col. Classroom Resources Materials.

Añón, E., Martín, O., Morales, L. (2011). *Matemáticas en Imágenes*. Elo editoras

Borrás, E., Moreno, P., Nomdedeu, X., Albalat, A. (2002). *RITMOS matemáticas e imágenes*. Madrid: Nivola.

«Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic» de l'Educació Primària i de l'ESO. (2013). Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament.

«iMÀTgen» secció de SUMA, des de 2003 fins a 2012.

«Mathematical Lens» secció de *Mathematics Teacher*, a partir de 2004.

Vilches, S., Cubas, C. (2009). *Diez años de concurso de Fotografía Matemática en Cataluña*. Actas XIV JAEM, Girona.

## Webs d'interès

DivulgaMAT Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas. Exposiciones Virtuales.  
<http://www.divulgamat.net>

Enriching math

<https://www.westsussex.gov.uk/learning.aspx>

Matemáticas en tu mundo

[http://catedu.es/matematicas\\_mundo/FOTOGRAFIAS/fotografia.htm](http://catedu.es/matematicas_mundo/FOTOGRAFIAS/fotografia.htm)

Matemáticas y fotografía. MEC.

<http://ntic.educacion.es/w3//eos/MaterialesEducativos/mem2000/matefoto/libro/index.htm>

Problem pictures

<http://www.problempictures.co.uk>

.....